

# 随机矩阵理论简介

随机矩阵理论 (Random Matrix Theory, RMT) 描述了元素为**随机变量**的**大矩阵模型**, 其特征值和特征向量的**确定性规律**。

- 举例而言, 考虑  $X \in \mathbb{C}^{p \times n}$  的矩阵, 其元素为标准复高斯随机变量  $\mathcal{CN}(0,1)$ , 其形成的样本协方差矩阵记为  $\hat{C} = \frac{1}{n}XX^H$ 。我们有如下观察:

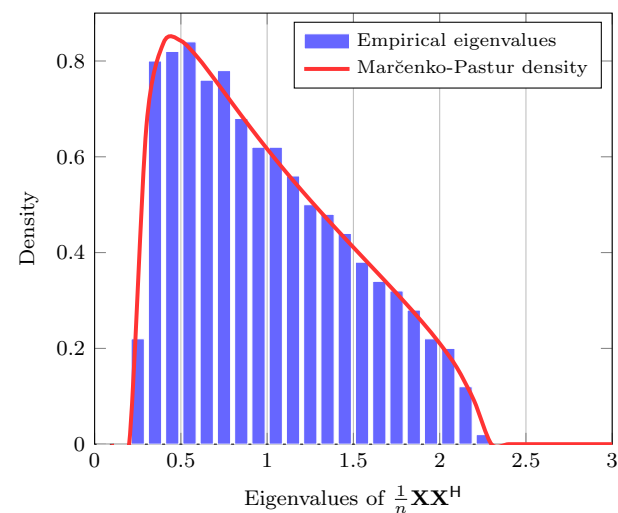
- 当**样本数  $n$  远大于维度  $p$** 时, 由大数定理可知样本协方差矩阵收敛与其期望, 也即  $\hat{C} - I_p \approx 0$ , 在任意矩阵范数意义下成立, 如二/谱范数;
- 当**样本数  $n$  不远大于维度  $p$** 时, 二/谱范数收敛**不再成立**, 有  $\|\hat{C} - I_p\|_2 \gg 0$ , 矩阵特征值出现**不匹配**
- 随机矩阵理论预测, 此时特征值分布由**Marcenko–Pastur分布**给出

$$\mu(dx) = (1 - c^{-1})\delta_0(x) + \frac{1}{2\pi cx} \sqrt{(x - E_-)(E_+ - x)} dx$$

- 其范围为  $[E_-, E_+] = [(1 - \sqrt{c})^2, (1 + \sqrt{c})^2]$ , 仅由**维度比  $c = p/n$** 决定
- 右图为  $p = 250, n = 4p$  时的仿真同 Marcenko–Pastur 理论分布对比, 如考虑  $\hat{C} - I_p \approx 0$ ,

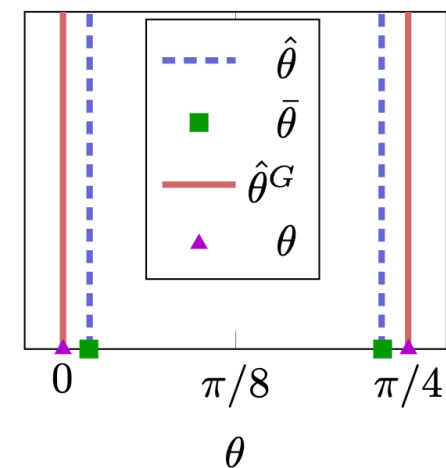
则导致  $\frac{|1-0.25|}{0.25} = \mathbf{300\%}$  的**相对误差!**

- 传统统计学仅为  $c = p/n \rightarrow 0$  的特例, **RMT 适用范围更广!**
- 已形成**较成熟的理论体系**, 针对**信号+噪声模型**, **时间序列模型**等均有对应结果



# 随机矩阵理论在高维信号与数据处理中的应用

- 随机矩阵理论已被用于刻画**大规模无线通信系统**（MIMO、CDMA等）的通信容量 [1]
- 随机矩阵理论已被用于刻画**大规模神经网络**的泛化性能 [2]
- 考虑**信号处理**（假设检验、角度、速度、位置等参数估计）问题，随机矩阵理论相较传统统计学，更适合**大规模阵列**或/**和时间采样少**情形下的信号处理方法优化
- 举例而言，针对大规模阵列来角（DoA）估计问题，文献 [3, 4] 证明在阵列规模 $p$ 和快拍数 $n$ 都较大时，传统MUSIC和ESPRIT等子空间方法均导致为真实DoA的**有偏估计**，需要拓展、修正算法实现**无偏估计**
- 仿真如右图，其中 $\theta$ 为真实DoA， $\hat{\theta}$ 为传统ESPRIT方法给出DoA估计（**有明显偏差**）， $\hat{\theta}^G$ 为所提出的**G-ESPRIT**方法，可**准确估计真实DoA**
- 针对无人机等**新型、大规模感知系统**的算法设计有**重要实用价值!**



[1] R. Couillet and M. Debbah, Random matrix methods for wireless communications. Cambridge University Press, 2011. doi: 10.1017/cbo9780511994746.

[2] R. Couillet and **Z. Liao (廖振宇)**, Random matrix methods for machine learning. Cambridge University Press, 2022. doi: 10.1017/cbo9781009128490.

[3] P. Vallet, X. Mestre, and P. Loubaton, "Performance Analysis of an Improved MUSIC DoA Estimator," IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 63, no. 23, pp. 6407–6422, Dec. 2015, doi: 10.1109/TSP.2015.2465302.

[4] W. Yang, Z. Wang, X. Mai, Z. Ling, R. C. Qiu and **Z. Liao (廖振宇)**, "Inconsistency of ESPRIT DoA Estimation for Large Arrays and a Correction via RMT," 2024 32nd European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Lyon, France, 2024, pp. 2722-2726. (**Best Paper Candidate**)