随机过程

1 随机过程基本概念

廖振宇

华中科技大学电子信息与通信学院

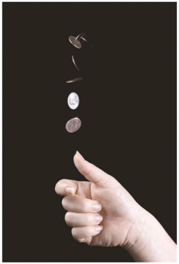
2025年2月25日

目录

目录

随机性的世界还是确定性的世界？

上海黄金交易所



掷骰子、掷硬币

Example (随机伯努利实验)

每隔一分钟随机抛掷一次硬币，观察结果 $X_0, X_1, \ldots$

- $X = \begin{cases} 1, & \text{硬币正面朝上: } \mathbb{P}(X) = p \in [0,1] \\ 0, & \text{硬币反面朝上: } \mathbb{P}(X) = 1 - p \in [0,1] \end{cases}$

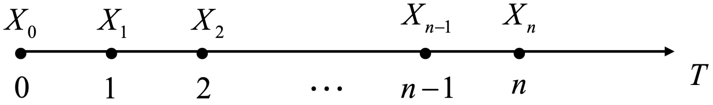
在时间轴上得到序列 $\{X_n; n = 0, 1, 2, \ldots\}$，$X_n = 1$或$0$

随机伯努利实验：两个观测时刻、n个观测时刻

考虑随机伯努利掷硬币实验中两个不同时刻 $t_1 \neq t_2 \in \{0, 1, \ldots\}$ 的实验结果 (X_{t_1}, X_{t_2}):

(X_{t_1}, X_{t_2})	0	1
0	$\mathbb{P}(X_{t_1} = 0, X_{t_2} = 0)$	$\mathbb{P}(X_{t_1} = 0, X_{t_2} = 1)$
1	$\mathbb{P}(X_{t_1} = 1, X_{t_2} = 0)$	$\mathbb{P}(X_{t_1} = 1, X_{t_2} = 1)$

- 形成二维度随机变量/向量(X_1, X_2)，样本空间为$\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$
- 可进一步推广至n个观测时刻，形成n维随机向量



两个同学的抛硬币结果

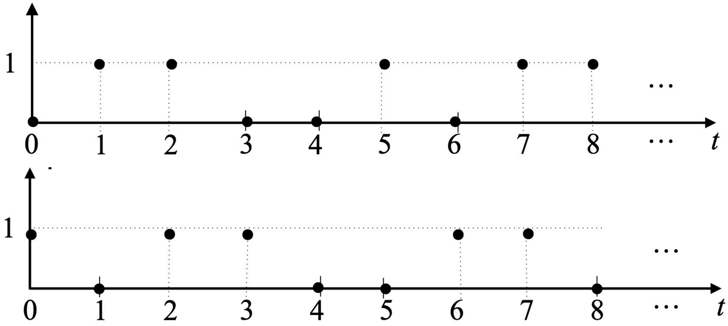


图: 甲乙两个同学分别n次抛硬币的结果

随机过程的定义

定义 (随机过程)

考虑概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$和实数集合T，对于任意给定的$t\in T, X(t,\omega),\omega\in\Omega$是$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$上的随机变量，我们称为**随机变量族**$X(t,\omega), t\in T,\omega\in\Omega$上的随机过程。

- 包含两个“变量”(ω, t)
- 其中$\omega\in\Omega$刻画随机样本; t称为参数，T称为参数集
- 如$T=\{0,1,\dots,100\}$为掷硬币实验的观察时间集合，t为观察时间
- 给定t，随机过程$X(t,\omega)$在时刻t的取值称为该随机过程在时刻的状态，是一个随机变量
- 给定$\omega\in\Omega, X(t)$, t称为样本函数，或随机过程的一个实现

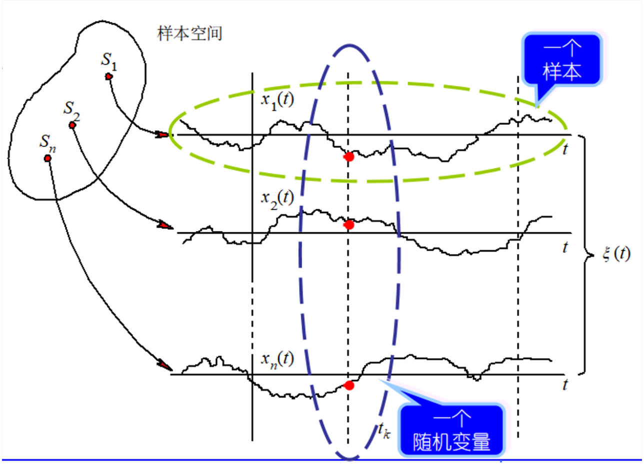
定义 (随机过程)

考虑概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$和实数集合T，对于任意给定的$t \in T, X(t, \omega), \omega \in \Omega$是$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$上的随机变量，我们称为**随机变量族**$X(t, \omega), t \in T, \omega \in \Omega$上的随机过程。

1. 包含两个“变量”(ω, t)
2. 考虑ω, t均为变量时，随机过程是一个时间函数族，或或依赖于参数t的随机变量族；
3. 当t是变量，ω固定时，是一个确定的时间函数（样本函数）；
4. 当t固定，ω是变量时，是一个随机变量（状态）；
5. 当t和ω均固定时，是一个确定的值。

为简便起见，书写时常省略随机因素ω，将随机过程简记为$X(t)$。

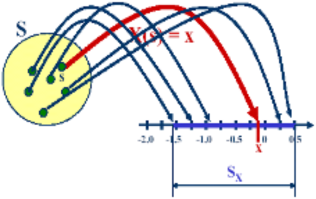
随机过程

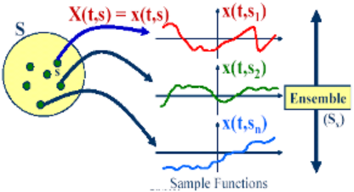


图：随机过程$X(\omega, t)$示意图

实函数、随机变量和随机过程的区别

- 实函数：实数（集合）→实数（集合）的映射
- 随机变量：随机实验结果→实数的映射
- 随机过程：引入时间（参数）t：随机实验结果→时间的函数





图：随机变量（左）和随机过程（右）的区别示意图

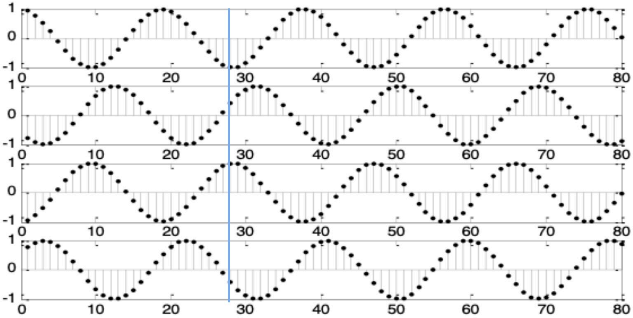
例子：随机相位正弦波信号

Example (随机相位正弦波信号)

考虑随机相位正弦波信号$X(t)=a\cos(\omega t+\theta)$，其中$a,\omega$为常数参数，$\theta$是在$[2,\pi)$内服从均匀分布的随机变量。

1. 对于任何给定的时间参数$t=t_i=1s$，$X(t_i)=a\cos(\omega t_i+\theta)=a\cos(\omega+\theta)$是一个随机变量；
2. 若考虑随机变量θ的一次实现$\theta=\theta_i=\pi/4$，得到样本函数$x_i(t)=a\cos(\omega t_i+\theta_i)$，是时间t的确定性函数（关于t的序列）
3. 若$t=t_i,\theta=\theta_i$均给定，$x_i(t_i)=a\cos(\omega t_i+\theta_i)$为一个实数

例子：随机相位正弦波信号



图：随机相位正弦波信号$X(t) = a\cos(\omega t + \theta)$

1. 从上往下看：$x_1(t) = a\cos(\omega t + \theta_1), x_2(t) = a\cos(\omega t + \theta_2), x_3(t) = a\cos(\omega t + theta_3), x_4(t) = a\cos(\omega t + \theta_4)$是参数t的四个确定性函数
2. 确定（时间）参数$t = t_i$（图中蓝线），则得到一个随机变量$X(t_i) = a\cos(\omega t_i + \theta)$（的四次实现）

随机过程的分类：按参数集和状态空间是离散还是连续

- 离散时间VS连续时间：
  - 若参数集T是可数有限集$T=\{t_k,k=0,1,2,\ldots,n\}$，称为有限随机变量序列；若参数集T是可数无限集$T=\{t_k,k=0,1,2,\ldots\}$，称为无限随机变量序列；统称离散时间随机过程，简称随机序列
  - 若参数集T是不可数有限集$T=\{t,a\le t\le b\}$或$T=\{t,t\ge t_0\}$；或者若参数集T是不可数无限集$T=\{t,-\infty<t<+\infty\}$或$T=\{t,0\le t<+\infty\}$；称为连续时间随机过程
- 离散型VS连续型：若随机过程$X(t)$在任意时刻的过程$X(t_i)$是离散型随机变量，称为离散型随机过程；若是$X(t_i)$连续型随机变量，称为连续型随机过程

随机过程的分类

1. 参数离散、状态离散的随机过程，或离散随机序列。如伯努利过程：$T = \{1, 2, 3, \ldots\}, \Omega = \{0, 1\}$
2. 参数离散、状态连续的随机过程，或（连续）随机序列。如数字信号；每隔一定时间对随机噪声进行采样，$T = \{\ldots, -2\Delta t, -\Delta t, 0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots\}, \Omega = \mathbb{R}$
3. 参数连续、状态离散的随机过程。如计数过程；电话呼叫次数，$T = [0, \infty)$，$\Omega = \{0, 1, 2 \ldots\}$
4. 参数连续、状态连续的随机过程。如热噪声电压，$T = [0, \infty)$，$\Omega = \mathbb{R}$

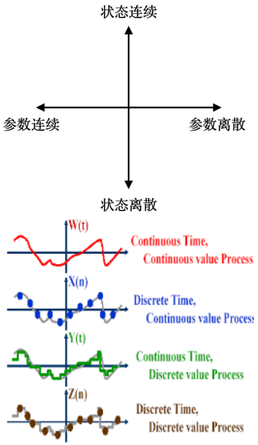


图: 随机过程的分类

随机过程的其他分类方式

- 按随机过程概率分布规律可分为：
  - 独立过程、独立增量过程、高斯过程、泊松过程、维纳过程、马尔可夫过程、瑞利过程、平稳过程，等等。
- 按随机过程统计平稳特性可分为：
  - 严平稳过程、宽平稳过程、周期平稳过程、非严平稳过程，等。
- 按随机过程的遍历特性可分为：
  - 遍历过程、非遍历过程。
- 按随机过程的功率谱特性可分为：
  - 宽带过程、窄带过程，等。

目录

随机过程的一维概率分布

设$\{X(t), t\in T\}$是一个随机过程，对于任意固定的$t\in T$，$X(t)$是个随机变量，其分布函数为

$$F(x,t)=\mathbb{P}\{X(t)\le x\}$$

称为随机过程$\{X(t), t\in T\}$的一维分布函数。
如果存在

$$F(x,t)=\int_{-\infty}^{x} f(y,t)dy$$

则

$$f(x,t)=\frac{\partial F(x,t)}{\partial x}$$

称$f(x,t)$为随机过程$\{X(t), t\in T\}$的一维概率密度函数。

随机过程的二维概率分布

设$\{X(t), t \in T\}$是一个随机过程，对于任意固定的两个$t_1, t_2 \in T$，$\{X(t_1), X(t_2)\}$是一个二维随机变量，其联合分布函数为

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = \mathbb{P}\{X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2\}$$

称为随机过程$\{X(t), t \in T\}$的二维分布函数。
如果存在

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(y_1, y_2; t_1, t_2) dy_2 dy_1$$

则

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

称$f(x_1, x_2; t_1, t_2)$为随机过程$\{X(t), t \in T\}$的二维概率密度函数。

随机过程的二维概率分布

针对一个随机过程X(t)，一维概率分布可以看成是二维概率分布的边缘分布，有下列关系：

$$f(x_1;t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2;t_1,t_2)\,dx_2$$

$$f(x_2;t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2;t_1,t_2)\,dx_1$$

$$F(x_1;t_1) = F(x_1,\infty;t_1,t_2)$$

$$F(x_2;t_2) = F(\infty,x_2;t_1,t_2)$$

随机过程的n维概率分布

设 $\{X(t), t \in T\}$ 是一随机过程，对于任意时刻 $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$, $\{X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)\}$ 组成n维随机变量，其联合分布函数为

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) = \mathbb{P}\{X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2, \cdots, X(t_n) \le x_n\}$$

称为随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的n维分布函数
如果存在

$$F(x_1, \cdots, x_n; t_1, \cdots, t_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(y_1, \ldots, y_n; t_1, \cdots, t_n) dy_1 \cdots dy_n$$

或者

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n}$$

称 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 为随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的n维概率密度函数

有限维分布函数族

随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的一维分布函数、二维分布函数、…、n维分布函数等的全体：

$$\{F(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n), t_1, t_2, \cdots, t_n \in T, n \geq 1\}$$

称为随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的有限维分布函数族
同样地，概率密度的整体

$$\{f(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n), t_1, t_2, \cdots, t_n \in T, n \geq 1\}$$

称为随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的有限维概率密度族

- 它们描述了随机过程的概率分布！

$n+m$维联合分布函数

- 设 $\{X(t), t\in T\}$ 和 $\{Y(t), t\in T\}$ 是两个随机过程，称 $\{[X(t), Y(t)]^\top, t\in T\}$ 为二维随机过程
- 对于任意的 $t_i\in T, t_j\in T, i=1,2,\ldots,n, j=1,2,\ldots,m$，把 $n+m$ 维随机变量 $[X(t_1), X(t_2),\ldots, X(t_n), Y(t_1), Y(t_2),\ldots, Y(t_m)]$ 的联合分布函数

$$\begin{aligned}&F_{XY}(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_m;t_1,t_2,\cdots,t_n;t_1',t_2',\cdots,t_m')\\&=\mathbb{P}\{X(t_1)\le x_1,\ldots,X(t_n)\le x_n, Y(t_1')\le y_1,\ldots,Y(t_m')\le y_m\}\end{aligned}$$

称为二维随机过程 $\{[X(t), Y(t)]^\top, t\in T\}$ 的 $n+m$ 维联合分布函数

$n+m$ 维联合概率密度

类似的，若存在

$$F_{XY}(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_m;t_1,t_2,\cdots,t_n;t'_1,t'_2,\cdots,t'_m)$$
$$=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}\int_{-\infty}^{y_1}\cdots\int_{-\infty}^{y_m}f_{XY}(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_m;t_1,\cdots,t_n;t'_1,\cdots,t'_m)$$
$$dx_1dx_2\cdots dx_n dy_1\cdots dy_m$$

或者

$$f_{XY}(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_m;t_1,\cdots,t_n;t'_1,\cdots,t'_m)$$
$$=\frac{\partial^{n+m}}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n\partial y_1\cdots\partial y_m}F_{XY}(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_m;t_1,\cdots,t_n;t'_1,\cdots,t'_m)$$

称

$$f_{XY}(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_m;t_1,\cdots,t_n;t'_1,\cdots,t'_m)$$

为随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 和 $\{Y(t),t\in T\}$ 的 $n+m$ 维联合概率密度

分布函数的性质

1 对称性： 对于 $(1,2,\ldots,n)$ 的任意一种排列 $(j_1,j_2,\ldots,j_n)$，有

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n;t_1,t_2,\ldots,t_n)=F(x_{j_1},x_{j_2},\ldots,x_{j_n};t_{j_1},t_{j_2},\ldots,t_{j_n})$$

事实上有$\mathbb{P}\{X(t_1)\le x_1,X(t_2)\le x_2,\ldots,X(t_n)\le x_n\}=\mathbb{P}\{X(t_{j_1})\le x_{j_1},X(t_{j_2})\le x_{j_2},\ldots,X(t_{j_n})\le x_{j_n}\}$

2 相容性： 对于任意整数 $m<n$，有

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_m;t_1,t_2,\ldots,t_m)=F(x_1,x_2,\ldots,x_m,\infty,\ldots,\infty;t_1,t_2,\ldots,t_n)$$

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_m;t_1,t_2,\ldots,t_m)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots,x_n;t_1,t_2,\ldots,t_n)\,dx_{m+1}\ldots dx_n$$

3 存在性定理： 若分布函数族 $\{F(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n),t_1,\ldots,t_n\in T,n\ge 1\}$ 满足对称性和相容性，则必存在一个随机过程 $\{X(t),t\in T\}$，使得 $F(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n,n\ge 1)$ 为 $\{X(t),t\in T\}$ 的有限维分布函数族，即

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n;t_1,t_2,\ldots,t_n)=\mathbb{P}\{X(t_1)\le x_1,X(t_2)\le x_2,\ldots,X(t_n)\le x_n\}$$

分布函数的性质：独立性

- 独立性（充要条件）： 对于随机过程 $\{X(t), t \in T\}$，若 $X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)$ 统计独立，则有

$$
\begin{aligned}
&F(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) \\
&= F(x_1; t_1) \cdot F(x_2; t_2) \cdots F(x_n; t_n) \\
&f(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) \\
&= f(x_1; t_1) \cdot f(x_2; t_2) \cdots f(x_n; t_n)
\end{aligned}
$$

- 如果随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 和 $\{Y(t), t \in T\}$ 相互独立，则有

$$
\begin{aligned}
&F_{XY}(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m; t_1, \ldots, t_n; t'_1, \ldots, t'_m) \\
&= F_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) \cdot F_Y(y_1, \ldots, y_m; t'_1, \ldots, t'_m) \\
&f_{XY}(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m; t_1, \ldots, t_n; t'_1, \ldots, t'_m) \\
&= f_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) \cdot f_Y(y_1, \ldots, y_m; t'_1, \ldots, t'_m)
\end{aligned}
$$

伯努利随机序列

Example (伯努利随机序列)

考虑伯努利随机序列$\{X(n), n = 1, 2, \ldots\}$。在 $t = n$ 时刻，事件发生，记作$X(n) = 1$; 在 $t = n$ 时刻，事件不发生，记作$X(n) = 0$。已知$\mathbb{P}\{X(n) = 1\} = p, \mathbb{P}\{X(n) = 0\} = 1 - p = q$, 计算该随机序列的一维、二维概率分布和密度函数。

$X(n)$ 分布率

$X(n)$	0	1
$\mathbb{P}$	$q = 1 - p$	p

根据定义，有

$$F(x; n) = \mathbb{P}\left(X(n) \le x\right) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ q, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases} = \boxed{pU(x-1) + qU(x)}$$

其中，$U(x)$ 是单位阶跃函数，定义为$U(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

Example (伯努利随机序列)

考虑伯努利随机序列$\{X(n), n=1,2,\ldots\}$。在 $t=n$ 时刻，事件发生，记作$X(n)=1$; 在 $t=n$ 时刻，事件不发生，记作$X(n)=0$。已知$\mathbb{P}\{X(n)=1\}=p$, $\mathbb{P}\{X(n)=0\}=1-p=q$, 计算该随机序列的一维、二维概率分布和密度函数。

一维概率密度函数为:

$$f(x;n)=\frac{\partial F(x,n)}{\partial x}=p\delta(x-1)+q\delta(x)$$

其中，$\delta(x)$ 为单位冲激函数。其二维概率分布函数，由$X(n_1), X(n_2)$统计独立

$$F(x_1,x_2;n_1,n_2)=\mathbb{P}[X(n_1)\le x_1, X(n_2)\le x_2]=\mathbb{P}[X(n_1)\le x_1]\cdot\mathbb{P}[X(n_2)\le x_2]$$

$$=p^2U(x_1-1,x_2-1)+pqU(x_1-1,x_2)+pqU(x_1,x_2-1)+q^2U(x_1,x_2)$$

二维概率密度函数为

$$f(x_1,x_2;n_1,n_2)=p^2\delta(x_1-1,x_2-1)+pq\delta(x_1-1,x_2)+pq\delta(x_1,x_2-1)+q^2\delta(x_1,x_2)$$

其中，$U(x,y)=U(x)U(y)$ 是二维单位阶跃函数，$\delta(x,y)=\delta(x)\delta(y)$ 为二维单位冲激函数。

例子：袋中取球

Example (袋中取球)

袋中放有一个白球，两个红球，每隔单位时间从袋中任取一球，取后放回，对于每一个固定的 t 对应随机变量

$$X(t)=\begin{cases}\frac{t}{3}, & \text{如果t时刻取得红球}\\ e^t, & \text{如果t时刻取得白球}\end{cases}$$

求这个随机过程的一维分布函数族。

其分布律为

$X(t)$取值	$\frac{t}{3}$	e^t
$\mathbb{P}(X(t)=x_i)$	$2/3$	$1/3$

故一维分布函数为：

$$F(x_1;t_1)=\mathbb{P}(X(t_1)\le x_1)=\begin{cases}0, & x_1<\frac{t_1}{3}\\ \frac{2}{3}, & \frac{t}{3}\le x_1<e^{t_1}\\ 1, & x_1\ge e^{t_1}\end{cases}$$

目录

目录